

Priebeh funkcie

L'Hospitalove pravidlá

Tvrdenie 1 *L'Hospitalovo pravidlo (ľahké)*

Nech $a \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty; \infty\}$, funkcie f, g sú definované na $\mathcal{U}^*(a)$. Nech:

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$,
- $\forall x \in \mathcal{U}^*(a) : f, g \in D(\{x\})$, kde $g'(x) \neq 0$.

Ak existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, tak existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$, $A \in \mathbb{R}^*$.

Tvrdenie 2 *L'Hospitalovo pravidlo (ťažké)*

Nech $a \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty; \infty\}$, funkcie f, g sú definované na $\mathcal{U}^*(a)$. Nech:

- $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = \infty$,
- $\forall x \in \mathcal{U}^*(a) : f, g \in D(\{x\})$, kde $g'(x) \neq 0$.

Ak existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, tak existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$, $A \in \mathbb{R}^*$.

Monotónnosť funkcie

Tvrdenie 3 *Postačujúca podmienka rýdzomonotónnosti funkcie*

Nech funkcia f je diferencovateľná na (a, b) a $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) pre všetky $x \in (a, b)$. Potom je funkcia f rastúca (klesajúca) na (a, b) .

Tvrdenie 4 *Nutná a postačujúca podmienka monotónnosti funkcie*

Nech funkcia f je diferencovateľná na (a, b) . Funkcia f je neklesajúca (nerastúca) na (a, b) práve vtedy, keď $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$), pre všetky $x \in (a, b)$.

Definícia 1 Nech funkcia f je definovaná na intervale (a, b) , $a, b \in \mathbb{R}$ a nech $x_0 \in (a, b)$. Hovoríme, že funkcia f má v číslu x_0 **lokálne maximum** (**lokálne minimum**), ak existuje také okolie $\mathcal{U}(x_0)$, že pre všetky $x \in \mathcal{U}(x_0)$ je $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$).

Ak pre všetky $x \in \mathcal{U}(x_0)$, $x \neq x_0$, platí $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$), hovoríme, že funkcia má v x_0 **ostré lokálne maximum** (**ostré lokálne minimum**).

Lokálne maximá a minimá sa označujú spoločným názvom **lokálne extrém**.

Veta 1 Nech funkcia f je spojitá v číslu x_0 . Nech existuje také ľavé okolie čísla x_0 , v ktorom je funkcia f neklesajúca (nerastúca, rastúca, klesajúca) a také pravé okolie čísla x_0 , v ktorom je funkcia f nerastúca (neklesajúca, klesajúca, rastúca). Potom funkcia f má v x_0 lokálne maximum (lokálne minimum, ostré lokálne maximum, ostré lokálne minimum).

Veta 2 *Fermatova veta*

Ak funkcia f má v číslu x_0 lokálny extrém a má v tom číslu deriváciu, tak $f'(x_0) = 0$.

Definícia 2 *Stacionárny bod funkcie* f je číslo x_0 patriace do definičného oboru funkcie f , v ktorom $f'(x_0) = 0$.

Funkcia f môže mať lokálny extrém len v stacionárnych bodoch alebo v bodoch, v ktorých neexistuje prvá derivácia.

Tvrdenie 5 1. postačujúca podmienka pre lokálne extrém Nech funkcia f je spojitá v číslu x_0 . Nech existuje také ľavé okolie čísla x_0 , že pre všetky x z tohto okolia je $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$, $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$) a také pravé okolie čísla x_0 , že pre všetky x z tohto okolia je $f'(x) \leq 0$ ($f'(x) \geq 0$, $f'(x) < 0$, $f'(x) > 0$). Potom funkcia f má v číslu x_0 lokálne maximum (lokálne minimum, ostré lokálne maximum, ostré lokálne minimum).

Tvrdenie 6 2. postačujúca podmienka pre lokálne extrém Nech funkcia f je dvakrát diferencovateľná v číisle x_0 , $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) \neq 0$. Funkcia f má v číisle x_0 ostré lokálne minimum, ak $f''(x) > 0$ a ostré lokálne maximum, ak $f''(x) < 0$.

Tvrdenie 7 Zovšeobecnená postačujúca podmienka pre lokálne extrém

Nech funkcia $f \in \mathcal{D}^{(n)}(\{x_0\})$, $n \in \mathbb{N}$. Nech $f''(x_0) = f'''(x_0) = f^{(4)}(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ a $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, $n \geq 2$. Potom

1. ak n je párne, tak f má v číisle x_0 ostré lokálne maximum pre $f^{(n)}(x_0) < 0$ a ostré lokálne minimum pre $f^{(n)}(x_0) > 0$,
2. ak n je nepárne, tak f nemá v číisle x_0 lokálny extrém.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie. Inflexné body funkcie

Definícia 3 Nech funkcia f je definovaná na intervale $I = \langle a, b \rangle$. Hovoríme, že funkcia f je na I konvexná, keď $\forall x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$ platí:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Keď tieto nerovnosti majú miesto $\leq$ znak $<$ alebo $\geq$ alebo $>$, hovoríme o rýdzokonvexnej, konkávnej, resp. rýdzokonkávnej funkcii.

Definícia 4 Nech funkcia f je diferencovateľná v bode x_0 . Hovoríme, že funkcia f je rýdzokonvexná (rýdzokonkávna) v bode x_0 , ak existuje také okolie $\mathcal{U}(x_0)$ bodu x_0 , že $\forall x \in \mathcal{U}(x_0)$ platí $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ($f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$).

Veta 3 Nech funkcia f má deriváciu na intervale (a, b) , $a, b \in \mathbb{R}$. Potom funkcia f je **konvexná** (**konkávna**, **rýdzokonvexná**, **rýdzokonkávna**) na (a, b) práve vtedy, keď f' je neklesajúca (nerastúca, rastúca, klesajúca) na (a, b) .

Veta 4 Nech funkcia f je spojitá na intervale $\langle a, b \rangle$, $a, b \in \mathbb{R}$ a má na (a, b) druhú deriváciu. Potom funkcia f je na $\langle a, b \rangle$ **konvexná** (**konkávna**) práve vtedy, keď $\forall x \in (a, b)$ $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$). Nutná a postačujúca podmienka konvexnosti (konkávnosti) funkcie.

Ak $\forall x \in (a, b)$ platí, že $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$), tak funkcia f je **rýdzokonvexná** (**rýdzokonkávna**) na (a, b) . **Postačujúca podmienka rýdzokonvexnosti (rýdzokonkávnosti) funkcie.**

Veta 5 Nech funkcia f je definovaná v nejakom okolí $\mathcal{U}_\delta(x_0)$ bodu x_0 a má v x_0 deriváciu $f'(x_0)$. Bod x_0 nazývame **inflexným bodom** funkcie f , ak

- funkcia f je konvexná na $\mathcal{U}_\delta^+(x_0)$ a konkávna na $\mathcal{U}_\delta^-(x_0)$,

alebo

- funkcia f je konvexná na $\mathcal{U}_\delta^-(x_0)$ a konkávna na $\mathcal{U}_\delta^+(x_0)$.

Veta 6 Nutná podmienka existencie inflexného bodu Ak funkcia f má v číisle x_0 inflexný bod, tak $f''(x_0) = 0$.

Asymptoty

Priamku, ktorá má rovnicu $x = a$, nazývame **asymptotou bez smernice**, ozn. ABS, grafu funkcie f , ak funkcia f má v číisle a nevlastnú limitu alebo nevlastnú limitu zľava alebo nevlastnú limitu sprava.

Priamku, ktorá má rovnicu $y = kx + q$, nazývame **asymptotou so smernicou**, ozn. ASS, grafu funkcie f , ak platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$$

alebo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0.$$

Veta 7 Ak existujú limity

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f(x)}{x} \right], \quad q = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx]$$

alebo

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{f(x)}{x} \right], \quad q = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - kx],$$

tak priamka $y = kx + q$ je ASS grafu funkcie f .

Priebeh funkcie Poznatky, získané v predchádzajúcich kapitolách, využijeme pri vyšetrowaní základných vlastností funkcií a k nakresleniu ich grafov.

Ak chceme vyšetriť priebeh funkcie, musíme postupne vyriešiť nasledujúce úlohy:

1. Určiť definičný obor a obor hodnôt funkcie.
2. Vyšetriť párnosť, nepárnosť, ohraničenosť, periodičnosť funkcie. Nájsť nulové body funkcie.
3. Rozhodnúť o spojitosti funkcie na definičnom obore (t.j. nájsť body nespojitosti a určiť intervaly, na ktorých je funkcia spojitá).
4. Určiť jednostranné limity v bodoch nespojitosti, limitu v krajných bodoch intervalu, na kt. je funkcia definovaná, resp. limitu pre $x \rightarrow \pm\infty$.
5. Nájsť asymptoty bez a so smernicou, teda ABS, ASS.
6. Vyšetriť monotónnosť funkcie (nájsť intervaly, na ktorých je funkcia rastúca alebo klesajúca).
7. Nájsť lokálne extrémny funkcie, teda lokálne maximum a lokálne minimum.
8. Vyšetriť konkávnosť a konvexnosť funkcie, nájsť inflexné body.
9. Nakresliť graf funkcie.

Vyšetrite priebeh funkcie:

1. $f(x) = x^3 + 3x$
2. $f(x) = 16x(x - 1)^3$
3. $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1} + x$
4. $f(x) = x(x - 1)(x + 1)$
5. $f(x) = \frac{9 + x^2}{x}$
6. $f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$
7. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$
8. $f(x) = \frac{x^2}{x - 2}$
9. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$
10. $f(x) = \frac{5 - x^2}{x}$
11. $f(x) = 3x + \frac{3}{x - 2}$

12. $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

13. $f(x) = \frac{x^2}{x-3}$

14. $f(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$

15. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

16. $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$

17. $f(x) = x + 2 \operatorname{arctg} x$

18. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

19. $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$

20. $f(x) = \frac{e^x}{x}$

21. $f(x) = x \operatorname{arctg} x$

22. $f(x) = \sin x + \cos x$